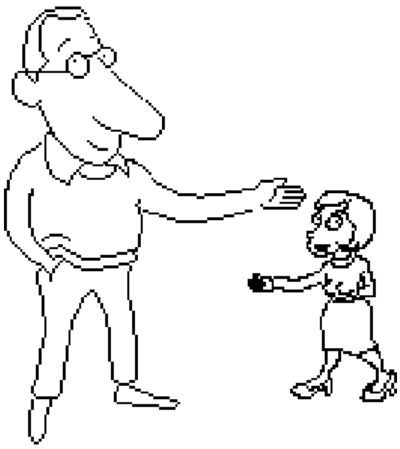
3 3º ESO

«El hombre hoy día sabe medir el universo pero no conoce la medida de sí mismo»
Dostoyeski

Problemas aritméticos



ÍNDICE:

T04_03a Aproximación numérica. Error absoluto y relativo. Redondeo.

Ya que los nos irracionales NO admiten una expresión racional no podemos dar un valor decimal exacto.

Así tenemos que trabajar con aproximaciones. La manera de controlar el ERROR cometido es dar una acotación. Es decir, valor por defecto y exceso.

P.ej: $3'14 < \pi < 3'15$ ó

$3'1415 < \pi < 3'1416$

La segunda es una estimación más precisa.

Error absoluto:

Diferencia en valor absoluto entre la aproximación y el valor real.

$|3'14 - \pi|$ ó $|3'1416 - \pi|$

Error relativo:

La razón entre el error absoluto y el valor real.

$$\frac{|3'14-\pi|}{\pi} \quad ó \quad \frac{|3'1416-\pi|}{\pi}$$

Redondeo:

Es la mejor de las dos aproximaciones por defecto o exceso.

Si la cifra siguiente a la que vamos a tomar es inferior a 5 se deja igual.

Si es 5 o superior se aumentan en 1

$\pi \cong 3'14159264...$

3'14 redondeo con 2 decimales.

3'1416 redondeo con 4 decimales.

2. LA PROPORCIONALIDAD EN LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS

PROPORCIONALIDAD SIMPLE

Directa

Matemáticamente se expresa así:

$$\frac{y}{x} = K; \text{ o bien, } y = K \cdot x$$

Al valor K se le llama CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD.

Los problemas de proporcionalidad directa los resolveremos por regla de tres, proporcionalidad de fracciones o reducción a la unidad -constante de proporcionalidad.

- Ejemplo: Con 3 botes de pintura he pintado 9 m^2 de pared. ¿Cuántos botes necesitaré para pintar 12 m^2?

Inversa

Ahora la relación matemática es que:

$$x \cdot y = K$$

Nuevamente a K se le llama constante de proporcionalidad inversa.

• Los problemas de proporcionalidad inversa se pueden resolver por la regla de tres inversa. Y cálculo de la constante de proporcionalidad.

• Ejercicio.– 6 obreros tardaron 10 días en realizar una obra. ¿Cuántos serán necesarios para acabarla en 3 días?

PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

• Se habla de proporcionalidad compuesta a aquellos problemas en los que tenemos más de dos variables implicadas.

Por ejemplo,

8 pintores pintan 4000 m^2 en 20 días. ¿Cuántos días necesitarán 10 pintores para pintar 6000 m^2?

Para resolverlo procederemos de la siguiente forma:

1° Situar la variable que tiene la incógnita entre las otras dos llevando los datos correspondientes:

nº pintores	tiempo (días)	superficie(m^2)
8	20	4000
10	x	6000

2° Ver qué tipo de proporcionalidad se da entre la incógnita y las otras dos variables.

I		D
nº pintores	tiempo (días)	superficie(m^2)
8	20	4000
10	x	6000

3° Operar según las reglas respectivas. Multiplicar en cruz si es directa y en línea si es inversa.

$$8 \cdot 20 \cdot 6000 = 10 \cdot x \cdot 4000$$

• Leyendo 2 h al día, tardé 10 días en leerme un libro de 1000 págs.
¿Cuántas días necesitaré para leerme un libro de 3000 Págs. leyendo 4 h al día?

3. PROBLEMAS CLÁSICOS

PROPORCIÓN

• Se llama proporción a la relación de igualdad que se da entre dos fracciones equivalentes:

Por ejemplo,

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

Podríamos leerlo así: «3 es a 5 como 6 es a 10»

• Una propiedad muy importante de las proporciones es que la suma o resta de los numeradores guarda la misma proporción con respecto a la suma o resta de los denominadores.

$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{3+6}{5+10} = \frac{9}{15}$. Con un ejemplo real, $\frac{8kg}{4€} = \frac{6kg}{3€} = \frac{(8+6)kg}{(4+3)kg}$

REPARTOS PROPORCIONALES

Una determinada cantidad se puede repartir proporcionalmente de forma directa o inversa.

REPARTO DIRECTO

Cuando existe proporcionalidad directa entre las magnitudes.

Por ejemplo,

• Tres socios distribuyen sus ganancias de forma directamente proporcional a su aportación. ¿Cómo lo harían si uno aportó 1 millón, otro 2 millones y otro 3 millones y la ganancia ha sido de 12 millones?

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{1+2+3} = \frac{12}{6} = 2 - cte.\ proporcionalidad -$$

Luego,

Socio A: x = 2 = 2 millones.

Socio B: 2 · 2 = 4 millones.

Socio C: 3 · 2 = 6 millones.

REPARTO INVERSO

Cuando existe proporcionalidad inversa entre las magnitudes. Luego hay proporcionalidad directa entre una magnitud y el inverso de la otra.

• Dispongo de 26 horas para enseñar una tarea a 3 niños de 2, 3 y 4 años respectivamente.

Decido dedicarles un tiempo inversamente proporcional a su edad. Es decir, dedicarle más tiempo al de menor edad. Pues sería lo equivalente a hacerlo directamente al inverso de las edades.

Luego, $\frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{y}{\frac{1}{3}}=\frac{z}{\frac{1}{4}}=\frac{x+y+z}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=\frac{26}{\frac{13}{12}}=\frac{26\cdot 12}{13}=24$

Por tanto,

x=1/2 de 24; y= 1/3 de 24; z=1/4 de 24.

PROBLEMAS DE MEZCLAS Y ALEACIONES

La clave está en la fórmula que me da el precio de la mezcla o la ley de la aleación.

$$P=\frac{m_1P_1+m_2P_2}{m_1+m_2};\ L=\frac{m_1L_1+m_2L_2}{m_1+m_2}$$

Donde *m* representan las distintas masas; *P* los diferentes precios; *L* las diferentes leyes de los componentes de la aleación.

PROBLEMAS DE MÓVILES

Pueden ser de móviles que van en la misma dirección y sentido o en sentido inverso.

El objetivo es determinar el tiempo que tardan en encontrarse, o la distancia que recorren hasta ese momento.

Mismo sentido

Hay que tener en cuenta dos cosas:

1. Que las velocidades se restan.
2. Que $v_a=\frac{e}{t}$

v_a es la velocidad de acercamiento entre los dos móviles.

Sentido opuesto

Tenemos en cuenta:

1. Que las velocidades se suman.
2. Que $v_a=\frac{e}{t}$

4. CÁLCULOS CON PORCENTAJES

Un porcentaje es una razón entre dos cantidades con denominador 100.

Es pues un caso de proporcionalidad directa.

Admite tres expresiones: porcentaje, fracción reducida y expresión decimal.

Por ejemplo,

$$20\%=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}=0'2$$

• Hay muchas cosas que llevan una disminución en %. Por ejemplo, las rebajas.

Y otras un aumento. Por ejemplo, los impuestos, los intereses bancarios.

• Por ejemplo: Un pantalón que cuesta 42 € se rebaja un 20%; ¿cuánto me costará?

¿Cómo se calcula el valor final?

AUMENTOS Y DISMINUCIONES PORCENTUALES

Tenemos que considerar tres cantidades.

1. La cantidad inicial. El valor sin el porcentaje.
2. La cantidad final. El valor con el porcentaje aplicado -sea aumento o disminución-.
3. El índice de variación. Que es 1 (100% o cantidad total) más o menos el porcentaje de variación.

La relación es evidente:

Cantidad final = Cantidad inicial · Índice de variación.

Cantidad inicial = Cantidad final : Índice de variación.

• Un señor que cobraba 900€ al mes le van a aumentar el sueldo en un 12%. ¿Cuánto ganará a partir de dicho momento?

5. INTERÉS COMPUESTO

Interés: Beneficio que se obtiene al colocar un capital en un banco o empresa. O el pago derivado de un préstamo.

Interés compuesto: Se llama al así a la evolución de un capital que se deposita con un interés al cabo de cierto tiempo.

En ellos intervienen:

1. Una cantidad inicial depositada o prestada: C_0
2. El tanto por ciento de interés: r
3. Una variable, el periodo de referencia para el cálculo del interés: tiempo (t)
4. La cantidad final o al cabo de cierto tiempo: C

La evolución del capital viene dada por la fórmula:

$$C = C_0 \cdot (1+r)^t$$

En el fondo es un incremento porcentual encadenado.

t=1	t=2	t=3	t=4
C_0	$C_0(1+r)$	$C_0(1+r)^2$	$C_0(1+r)^3$

Ejemplo

En un banco invierto 2 millones de €. Me ofrecen el 1,2% de interés anual. ¿Cómo evoluciona mi dinero con el tiempo? ¿Cuánto dinero tendré en total al cabo de 5 años?

$$C = C_0 \cdot (1 \pm r)^n$$
$$C = 2 \cdot (1 + 0'1)^5$$

Compro un coche de 12000€ con una financiación del 2% anual durante 5 años. ¿Cuánto pagaré en total?